数学　　MATHEMATICS

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の微分方程式を解け.

(1-1)　$y' + y = 3$

(1-2)　$y'' + 2y' - 3y = 3x^2$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$ の値を求めよ.

(3) 全微分可能な関数 $z = f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ について次の問いに答えよ.

(3-1)　$(x, y) = (1, \sqrt{3})$における z の全微分を求めよ.

(3-2)　z 上の点 $\left(1, \sqrt{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ における接平面の方程式を求めよ.

(4) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$の極値を求めよ.

ただし，$0 < x < \pi$，$0 < y < \pi$とする.

数学　　MATHEMATICS

2. 以下の問いに答えよ．

(1) 次のベクトルに関する問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$は基本ベクトルである．

(1-1) ベクトル$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$に垂直で，大きさが 4 のベクトル$\boldsymbol{c}$を求めよ．

(1-2) 座標$(-2,\ 1, -3)$の点 P に作用する力を$\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$とするとき，座標$(2, -1, 4)$の点 Q 周りの$\boldsymbol{F}$のモーメントを求めよ．

(1-3) ベクトル$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$を 3 辺とする四面体の体積を求めよ．

(2) 次の連立方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 3x_5 = -1 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_4 + x_5 = -10 \end{cases} \qquad [2\text{-}1]$$

について，以下の問いに答えよ．

(2-1) 連立方程式[2-1]が解を持つことを rank（階数）を用いて説明せよ．

(2-2) 連立方程式[2-1]の解の自由度を示し，解を求めよ．

(3) 次の方程式[2-2]について，以下の問いに答えよ．

$$15x^2 + 2\sqrt{3}xy + 13y^2 = 48 \qquad [2\text{-}2]$$

(3-1) 方程式[2-2]は以下のように行列で表現できる．行列Aを示せ．

$$(x \quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 48$$

(3-2) 行列Aは直交行列Pにより対角化できる．直交行列Pを求めよ．

(3-3) 方程式[2-2]の標準形を求めよ．

(3-4) 方程式[2-2]と問(3-3)で求めた標準形はどのような関係にあるか，図示して説明せよ．