

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$$

(2) 次の微分方程式を解け.

(2-1)  $-x^2 + 2y^2 = 4xyy' \quad (x > 0)$

(2-2)  $y'' - 3y' + 2y = x + e^x \sin x$

(3) 直交座標系  $(x, y, z)$  において, 次の回転放物面体と円柱が重なる部分の体積を求めよ.

回転放物面体:  $0 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)$

円柱:  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$

2. 以下の問いに答えよ.

(1)  $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ および $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1-1) ベクトル $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ の組は一次独立であることを示せ.

(1-2) ベクトル $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ の組は一次従属であることを示せ.

(1-3) ベクトル $\mathbf{b}$ がベクトル $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ の一次結合として表せるための条件を求めよ.

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -4 \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(2-1) 連立方程式の解が存在することを rank (階数) を用いて示せ.

(2-2) 連立方程式の解の自由度を示せ.

(2-3) 連立方程式の解を求めよ.

(3) 2次形式 $f = 3x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz + 4xz$ について, 以下の問いに答えよ.

(3-1) 2次形式 $f$ は対称行列 $A$ を用いて以下のように表現できる. 対称行列 $A$ を示せ.

$$f = (x \ y \ z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(3-2) 対称行列 $A$ は直交行列 $P$ により対角化できる. 直交行列 $P$ を求めよ.

(3-3) 2次形式 $f$ を標準形にせよ.

(3-4) 2次形式 $f$ はどのような図形を表すか答えよ.

(3-5)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき, 2次形式 $f$ の最大値および最小値を求めよ.