1. 図 1-1 に示すように，半径 R，質量 M の一様な円板 2 枚を，半径 r（$r < R$）で質量を無視できる十分に短い丸棒でつないだ形の物体（以下，ヨーヨー）の運動を考える．丸棒に太さと質量を無視できる糸の一端を固定し，糸を丸棒に巻き付けた後に糸の他端 P を持ってヨーヨーを静かに放すと，ヨーヨーは単一の鉛直面内で運動する．このとき以下の問いに答えよ．なお，重力加速度は g とし，摩擦と空気の抵抗は無視できる．

(1) このヨーヨーの中心軸周りの慣性モーメントを求めよ．

(2) 図 1-2 に示すように，このヨーヨーが初速度ゼロで降下するとき，降下中の時刻 t_d における糸の張力 T_d，ヨーヨーの速度 v_d および回転角速度 ω_d を，M, R, r, g, t_d から必要なものを用いて表せ．

(3) 図 1-3 に示すように，ヨーヨーが降下し，糸が伸びきると，ヨーヨーは回転の向きを変えないまま糸を巻き付けながら鉛直に上昇する．上り始めたとき（同図中の $t_u = 0$）の回転角速度を ω_0 とするとき，上昇中の時刻 t_u における糸の張力 T_u，ヨーヨーの速度 v_u および回転角速度 ω_u を，$M, R, r, \omega_0, g, t_u$ から必要なものを用いて表せ．

(4) ヨーヨーを静かに放すと同時に，糸の端 P を一定の加速度で動かし，ヨーヨーを放した位置に留まるようにした．このときの糸の端 P の加速度を求めよ．

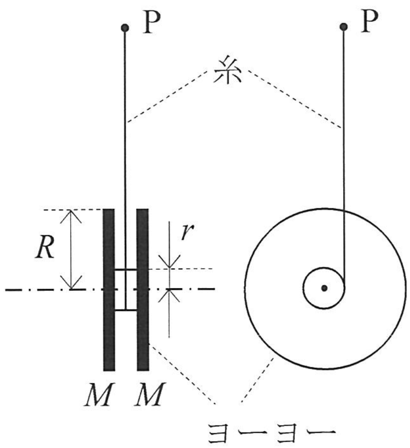

図 1-1

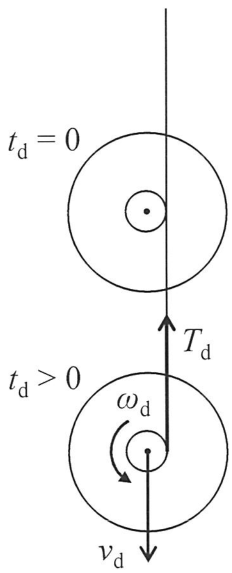

図 1-2

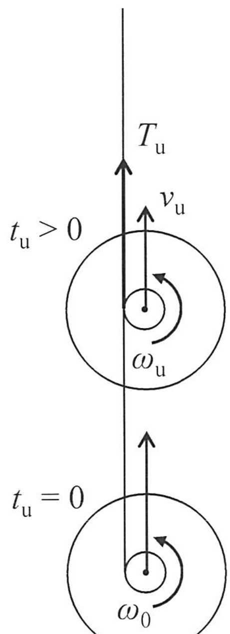

図 1-3

2. 図 2-1 に示すように，張力 T で x 軸上（$x \geq 0$）に張られた無限に長い弦の端部 P（$x = 0$）を y 軸方向に角振動数 ω_0，小さな振幅 y_0 で $y = y_0 \sin(\omega_0 t)$ のように振動させた．ここで t は時刻を表す．このとき弦を伝わる横波について，以下の問いに答えよ．ただし，弦の各部の変位は y 軸方向のみであり，張力 T は振動によって変化しないものと仮定する．また弦の単位長さあたりの質量を ρ とし，摩擦と重力は無視できるものとする．

(1) 以下の文章の（　a　）から（　f　）に入る適切な数式を答えよ．

図 2-2 に示すように，原点からの距離が x から $x+\Delta x$ までの微小部分に働く y 軸方向の力の合計は，微小部分の両端で張力 T が x 軸となす角 $\theta_x, \theta_{x+\Delta x}$ を用いると（　a　）のように表される．この微小部分の質量は（　b　）であるから，ここでは弦の変形を無視すれば，微小部分の運動方程式を（　c　）と書くことができる．θ が十分に小さい場合 $\sin\theta \approx \tan\theta$ と近似できるので，波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (\quad \mathrm{d} \quad)\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

が得られる．この波の位相速度は（　e　）であり，端部 P を題意のように振動させ続けた場合に弦を伝わる進行波の波動関数は $y = y_0 \sin[\omega_0 \{t - (\quad \mathrm{f} \quad)\ x\}]$ となる．

(2) 弦が x 軸上にあった状態から図 2-2 の状態になるまでに微小部分が引き伸ばされることで蓄えられる弦のポテンシャルエネルギーは，

$$\frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x$$

と書けることを示せ．必要であれば近似式 $\sqrt{1+\delta} \approx 1 + \delta/2$（$\delta \ll 1$）を用いてよい．

(3) 問(2)で示した弦のポテンシャルエネルギーは同じ場所の弦の運動エネルギーに等しいことを示せ．

(4) 端部 P で弦が x 軸となす角を $\theta_{x=0}$ とする．近似式 $\sin\theta_{x=0} \approx \tan\theta_{x=0}$ が成り立つとき，端部 P での張力 T の y 方向成分，および，これに抗して外部から弦になされる仕事率を求め，エネルギー保存則が成り立つことを説明せよ．

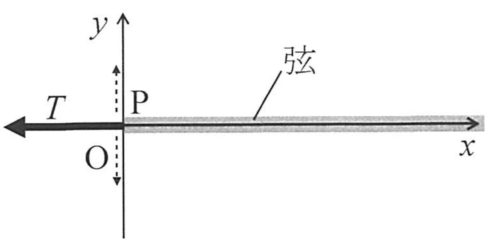

図 2-1

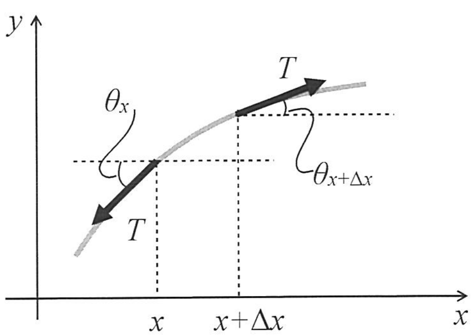

図 2-2